Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ)
Graduação em Administração
Microeconomia II
Prof: Paulo Coimbra
Monitor: Flavio Moraes

GABARITO LISTA 2

1. No duopólio de Cournot, cada firma escolhe a quantidade que maximiza o seu lucro dada a quantidade da outra firma (sendo que a escolha é simultânea). O problema de maximização de lucro da firma 1 é:

$$\underset{q_1}{Max}\ P.q_1 - C.q_1 \equiv \underset{q_1}{Max}\ q_1\left[A - (q_1 + q_2) - C\right]$$

$$\underline{\text{CPO:}}\quad q_1)\ A - (q_1 + q_2) - C - q_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{A - C - q_2}{2}$$

A firma 2 resolve um problema semelhante e tem como CPO:

$$q_2 = \frac{A - C - q_1}{2}$$

Como as firmas são idênticas (têm os mesmos custos), temos que, em equilíbrio, $q_1^* = q_2^*$. Daí:

$$q_1^* = \frac{A - C - q_1^*}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{A - C}{3}$$

Esta é a quantidade produzida por cada firma em equilíbrio de Cournot-Nash.

2. No duopólio de Bertrand, cada firma escolhe o preço que maximiza o seu lucro dado o preço da outra firma. O lucro da firma i é dado por $\pi_i = (P_i - C).q_i\,(P_i, P_j)$, em que $q_i\,(P_i, P_j)$ é a demanda da firma i dados o seu preço e o preço da firma j. Ela está representada abaixo.

$$q_i(P_i, P_j) = \begin{cases} A - P_i & se\ P_i < P_j \\ \dfrac{A - P_i}{2} & se\ P_i = P_j \\ 0 & se\ P_i > P_j \end{cases}$$

Isso quer dizer que a firma i fica com toda a demanda do mercado se cobrar um preço menor que a firma j, divide a demanda com a firma j se cobrar o mesmo preço que ela e fica com demanda zero se cobrar um preço maior que a firma j (isso tudo é porque as firmas são idênticas e produzem um bem homogêneo).

Repare que se $P_i < C$, a firma terá prejuízo. Logo, devemos ter $P_i \geq C$. Agora, se $P_i > C$, a firma j pode cobrar um preço infinitesimalmente menor do que P_i e roubar todo o mercado ($P_j = P_i - \varepsilon > C$, com $\varepsilon \rightarrow 0$). A firma i, ciente disso, vai querer cobrar um preço infinitesimalmente menor do que P_j e assim por diante. Logo, o único preço em que não vai haver incentivo a desvio é $P_i^* = P_j^* = C$ (pois se uma firma cobrar mais perde todo o mercado para a outra e se cobrar menos tem prejuízo, o que não pode ocorrer, já que a firma é maximizadora de lucro). Logo, o equilíbrio de Nash desse jogo de Bertrand é $P_1^* = P_2^* = C$ (o equilíbrio competitivo).

3.

(a) Verdadeiro. Suponha um duopólio em que a demanda de mercado é dada por $P(Q) = A - Q$, com $Q = q_1 + q_2$, e seja $C < A$ o custo marginal de ambas as firmas (são idênticas, portanto). Como vimos na primeira questão, a quantidade de equilíbrio de Cournot-Nash é $q_1^* = q_2^* = (A - C)/3$. Em um cartel, as duas firmas maximizam o lucro total como se fossem uma única firma monopolista e então dividem o lucro.

$$\underset{Q}{Max}\ P.Q - C.Q \equiv \underset{Q}{Max}\ Q\left[A - Q - C\right]$$

<u>CPO</u>: $Q)\ A - Q - Q - C = 0$

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{A - C}{2}$$

Como as firmas são idênticas, temos que:

$$q_1^C = q_2^C = \frac{A-C}{4}$$

Note que o equilíbrio de Cournot gera, para cada firma, um lucro de:

$$\pi^* = (P-C)\,q_j^* = \left[A - 2\left(\frac{A-C}{3}\right) - C\right]\left(\frac{A-C}{3}\right)$$

$$\pi^* = \frac{(A-C)^2}{9}$$

E o equilíbrio de cartel gera, para cada firma, um lucro de:

$$\pi^C = (P-C)\,q_j^C = \left[A - \left(\frac{A-C}{2}\right) - C\right]\left(\frac{A-C}{4}\right)$$

$$\pi^C = \frac{(A-C)^2}{8}$$

Assim, vemos que, para cada firma, o lucro com o cartel é maior do que o lucro do equilíbrio de Cournot ($\pi^C > \pi^*$), sendo, portanto, melhor para ambas as firmas. No entanto, o equilíbrio de cartel pode ser implementado somente se ambas as firmas se comprometerem a produzir metade da quantidade de monopólio. Agora, veja como ficam os lucros das firmas se uma honra o compromisso e a outra não. Seja i a firma que desvia do compromisso e j a que honra o compromisso (logo, $q_j = (A - C)/4$). Abaixo está o problema de maximização da firma i.

$$\underset{qi}{Max}\ P.q_i - C.q_i \equiv \underset{q_1}{Max}\ q_i\left[3\left(\frac{A-C}{4}\right) - q_i\right]$$

<u>CPO</u>: $$q_i)\ 3\left(\frac{A-C}{4}\right) - q_i - q_i = 0$$

$$q_i^D = \frac{3(A-C)}{8}$$

Dessa forma, o preço é $P = A - q_i - q_j = (3A + 5C)/8$ e o lucro de cada firma é dado por:

$$\pi_i^D = \left[\frac{3A+5C}{8} - C\right]\frac{3(A-C)}{8} \Rightarrow \pi_i^D = \frac{9(A-C)^2}{64}$$
$$\pi_j^D = \left[\frac{3(A-C)}{8}\right]\frac{(A-C)}{4} \Rightarrow \pi_j^D = \frac{3(A-C)^2}{32}$$

Logo, $\pi_i^D > \pi^C > \pi^* > \pi_j^D$. Ou seja, se uma firma se compromete à produçãodo cartel e a outra desvia, esta última obtém um lucro maior do que obteria se tivesse honrado com o seu compromisso no cartel. Logo, o equilíbrio de cartel não pode ser um equilíbrio de Nash nesse jogo em que a decisão de produção só se dá uma vez, já que há incentivo a desvio.

(b) Verdadeiro. Em jogos em que as firmas tomam as suas decisões de produção apenas uma única vez, o equilíbrio de cartel não tem como se sustentar, como vimos no item anterior. Se o mesmo jogo (de decisão da quantidade produzida) é repetido um número finito de vezes, ainda assim tal equilíbrio não se sustenta. Para ver isso, suponha que o jogo se repita por T períodos. Assim, uma firma i pode respeitar o acordo do cartel até o período T-1 e no período T desviar e obter um lucro maior. Mas sabendo disso, a firma j irá desviar em T-1 e assim por diante. Dessa forma, o equilíbrio de cartel não é estável em horizonte finito. Somente em horizonte infinito (em que o acordo não tenha um fim definido) com uma estratégia que puna a firma que desviar do cartel (por exemplo, produzindo sempre a quantidade de equilíbrio de Cournot dali em diante) que esse equilíbrio de cartel pode se sustentar.

4.

(a) – <u>Equilíbrio de Bertrand</u>:

Primeiramente veja que $Q = q_1 + q_2 + q_3 = 1 - P$. O lucro da firma i é dado por $\pi_i = (P_i - C).q_i\,(P_i, P_j, P_z)$, em que $q_i\,(P_i, P_j, P_z)$ é a demanda da firma i dados o seu preço e os preços das firmas j e z. Ela está representada abaixo.

$$q_i(P_i, P_j, P_z) = \begin{cases} 1 - P_i & se\ P_i < P_j, P_z \\ \dfrac{1-P_i}{2} & se\ P_i = P_j < P_z\ (ou\ P_i = P_z < P_j) \\ \dfrac{1-P_i}{3} & se\ P_i = P_j = P_z \\ 0 & se\ P_i > P_j\ e/ou\ P_z \end{cases}$$

Se $P_i < C$, a firma terá prejuízo. Logo, como a firma é maximizadora de lucro, devemos ter $P_i \geq C$. Agora, se $P_i > C$, a firma j e/ou a firma z pode cobrar um preço infinitesimalmente menor do que P_i e roubar todo o mercado. A firma i, ciente disso, vai querer cobrar um preço infinitesimalmente menor do que P_j e/ou P_z e assim por diante. Logo, o único preço em que não vai haver incentivo a desvio é $P_i^* = P_j^* = P_z^* = C = 0$. Logo, o equilíbrio de Nash desse jogo de Bertrand é $P_1^* = P_2^* = P_3^* = C$ (o equilíbrio competitivo).

– <u>Equilíbrio de Cournot</u>:

Primeiramente vejamos o problema de maximização de lucro da firma 1.

$$\underset{q_1}{Max}\ P.q_1 - C.q_1 \equiv \underset{q_1}{Max}\ q_1\left[1 - \left(q_1 + q_2 + q_3\right)\right]$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad q_1)\ 1 - \left(q_1 + q_2 + q_3\right) - q_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{1 - q_2 - q_3}{2}$$

As firmas 2 e 3 resolvem um problema semelhante e daí temos:

$$q_2 = \frac{1 - q_1 - q_3}{2} \quad e \quad q_3 = \frac{1 - q_1 - q_2}{2}$$

Como as firmas são idênticas (têm os mesmos custos), temos que, em equilíbrio, elas produzem a mesma quantidade: $q_1^* = q_2^* = q_3^*$. Daí:

$$q_1^* = \frac{1 - q_1^* - q_1^*}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = q_3^* = \frac{1}{4}$$

Esta é a quantidade produzida por cada firma em equilíbrio de Cournot-Nash.

– <u>Equilíbrio de cartel</u>:

Como vimos na questão 3, em um equilíbrio de cartel, as firmas maximizam o lucro total como se fossem um monopolista e então dividem o lucro.

$$\underset{Q}{Max}\ P.Q - C.Q \equiv \underset{Q}{Max}\ Q[1-Q]$$

<u>CPO</u>: $Q)\ 1 - Q - Q = 0$

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{2}$$

Como as firmas são idênticas, temos que:

$$q_1^C = q_2^C = q_3^C = \frac{1}{6}$$

Esta é a quantidade produzida em um equilíbrio de cartel.

(b) Suponha que as firmas 2 e 3 se fundam. Denote a quantidade produzida pela empresa fundida por q_F. Daí, reescrevendo os problemas de maximização das firmas 1 e F (2 e 3 fundidas) obtemos:

$$q_1 = \frac{1-q_F}{2} \quad e \quad q_F = \frac{1-q_1}{2}$$

Como o custo marginal de produção é zero para as duas firmas, elas são idênticas e, em equilíbrio, $q_1^* = q_F^*$. Daí:

$$q_1^* = \frac{1-q_1^*}{2}$$
$$q_1^* = q_F^* = \frac{1}{3}$$

Essa é a quantidade de equilíbrio de Cournot neste duopólio. Dessa forma, o lucro de cada firma é $\pi_i^* = P.q_i = 1/9$. No caso do item (a), o lucro de cada uma das três firmas é $\pi_i^* = P.q_i = 1/16$. Entretanto, repare que no item (a), as firmas 2 e 3 recebem cada uma lucro de 1/16 e aqui no item (b) recebem juntas um lucro de 1/9. Como elas são idênticas, cada uma ficaria com um lucro de 1/18, que é menor do que se elas atuassem separadamente.

(c) Se as três firmas se associassem, agiriam como uma firma monopolista e dividiriam o lucro entre elas. Logo, o resultado seria idêntico ao de um cartel.

5. Inicialmente, interpretemos o enunciado. Como a firma 1 precisa de exatamente uma unidade de mão de obra e de uma unidade de capital para produzir uma unidade de produto, podemos escrever que a sua quantidade produzida será igual a $q_1 = min\{K,L\}$. Isto é, a firma possui uma tecnologia do tipo Leontieff (ou seja, se a firma tiver, por exemplo, três unidades de capital e uma unidade de mão de obra, ela irá produzir apenas uma unidade de produto). Já a firma 2 precisa de exatamente duas unidades de mão de obra e de uma unidade de capital para produzir uma unidade do bem. Dessa forma, ela também possui uma tecnologia do tipo Leontieff, representada por $q_2 = min\{K,L/2\}$. Dessa forma, podemos escrever de maneira simples os custos marginais de produção das firmas 1 e 2, respectivamente dados por $C_1 = w + r$ e $C_2 = 2w + r$.

   (a) – Equilíbrio de Bertrand:

   Primeiramente veja que $Q = q_1 + q_2 = 1 - P$. O lucro da firma i é dado por $\pi_i = (P_i - C_i).q_i (P_i, P_j)$, em que $q_i (P_i, P_j)$ é a demanda da firma i dados o seu preço e o preço da firma j. Ela está representada abaixo.

$$q_i(P_i, P_j) = \begin{cases} 1 - P_i & se\ P_i < P_j \\ \dfrac{1 - P_i}{2} & se\ P_i = P_j \\ 0 & se\ P_i > P_j \end{cases}$$

   Repare que o custo marginal da firma 2 é maior do que o da firma 1 ($C_2 > C_1$). Como devemos ter $P_2 \geq C_2$ (para que a firma 2 não tenha prejuízo), basta a firma 1 cobrar um preço infinitesimalmente menor do que P_2 que ela fica com todo o mercado. Desta forma, $P_1^* = C_2 - \varepsilon$, com $\varepsilon \rightarrow 0$, e o mercado é todo da firma 1. Este é o equilíbrio de Nash desse jogo de Bertrand.

   – Equilíbrio de Cournot:

   Primeiramente vejamos o problema de maximização de lucro da firma 1.

$$\underset{q_1}{Max}\ P.q_1 - C_1.q_1 \equiv \underset{q_1}{Max}\ q_1[1 - (q_1 + q_2) - w - r]$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad q_1)\ 1 - (q_1 + q_2) - q_1 - w - r = 0$$

$$q_1 = \frac{1 - q_2 - w - r}{2}$$

   Agora, vejamos o problema de maximização de lucro da firma 2.

$$\underset{q_2}{Max}\ P.q_2 - C_2.q_2 \equiv \underset{q_2}{Max}\ q_2[1 - (q_1 + q_2) - 2w - r]$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad q_2)\ 1-(q_1+q_2)-q_2-2w-r=0$$

$$q_2 = \frac{1-q_1-2w-r}{2}$$

Substituindo q_2 na equação de q_1:

$$q_1 = \frac{1-w-r-\left(\frac{1-q_1-2w-r}{2}\right)}{2}$$

$$q_1^* = \frac{1-r}{3}$$

E substituindo na equação de q_2 temos:

$$q_2 = \frac{1-2w-r-\left(\frac{1-r}{3}\right)}{2}$$

$$q_2^* = \frac{1-r-3w}{3}$$

Estas são as quantidades produzidas por cada firma em equilíbrio de Cournot-Nash.

– Equilíbrio de cartel:

Como vimos, em um equilíbrio de cartel, as firmas maximizam o lucro total como se fossem um monopolista e então dividem o lucro. O custo de produção da firma monopolista é igual ao custo da firma 1, que é menor (é mais eficiente). Daí:

$$\underset{Q}{Max}\ P.Q-C.Q \equiv \underset{Q}{Max}\ Q[1-Q]-[w+r]Q$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad Q)\ 1-Q-Q-w-r=0$$

$$Q = q_1+q_2 = \frac{1-w-r}{2}$$

Esta é a quantidade total produzida em um equilíbrio de cartel. A regra de decisão entre as firmas pode ser, por exemplo, metade para cada. Nesse caso, teríamos:

$$q_1^C = q_2^C = \frac{1-w-r}{4}$$

(b) Do item (a) temos que $q_1^* = (1 - r)/3$ e o preço é:

$$P = 1 - \left(\frac{1-r}{3}\right) - \left(\frac{1-r-3w}{3}\right)$$

$$P = \frac{1+2r+3w}{3}$$

Daí, o lucro da firma 1 é dado por:

$$\pi_1 = (P - C_1)\,q_1 = \left(\frac{1+2r+3w}{3} - w - r\right)\left(\frac{1-r}{3}\right)$$

$$\pi_1 = \frac{(1-r)^2}{9}$$

Logo, vemos que o lucro da firma 1 não depende de w.

6.

(a) – <u>Equilíbrio de Bertrand</u>:

Primeiramente veja que $Q = q_1 + q_2 = 1 - P$. O lucro da firma i é dado por $\pi_i = P_i\, q_i\,(P_i, P_j) - C(q_i)$, em que $q_i\,(P_i, P_j)$ é a demanda da firma i dados o seu preço e o preço da firma j. Ela está representada abaixo.

$$q_i(P_i, P_j) = \begin{cases} 1 - P_i & se\ P_i < P_j \\ \dfrac{1-P_i}{2} & se\ P_i = P_j \\ 0 & se\ P_i > P_j \end{cases}$$

Para que não haja incentivo a desvio para nenhuma firma, devemos observar $\pi_i = 0$. E além disso, como as firmas são idênticas, elas cobrarão o mesmo preço e vão dividir o mercado: $q_i = (1 - P_i)/2$. Daí:

$$P_i\, q_i - \frac{q_i^2}{2} = 0 \Rightarrow P_i = \frac{q_i}{2} \Rightarrow P_i = \frac{1}{5}$$

Este é o equilíbrio de Nash desse jogo de Bertrand.

– <u>Equilíbrio de Cournot</u>:

Primeiramente vejamos o problema de maximização de lucro da firma 1.

$$\underset{q_1}{Max}\ P.q_1 - C(q_1) \equiv \underset{q_1}{Max}\ q_1\left[1-(q_1+q_2)\right] - \frac{q_1^2}{2}$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad q_1)\ 1-(q_1+q_2)-q_1-q_1=0$$

$$q_1 = \frac{1-q_2}{3}$$

A firma 2 resolve um problema semelhante e daí temos:

$$q_2 = \frac{1-q_1}{3}$$

Como as firmas são idênticas (têm os mesmos custos), temos que, em equilíbrio, elas produzem a mesma quantidade: $q_1^* = q_2^*$. Daí:

$$q_1^* = \frac{1-q_1^*}{3}$$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{4}$$

Esta é a quantidade produzida por cada firma em equilíbrio de Cournot-Nash.

– <u>Equilíbrio de cartel</u>:

Como vimos, em um equilíbrio de cartel, as firmas maximizam o lucro total como se fossem um monopolista e então dividem o lucro.

$$\underset{Q}{Max}\ P.Q - C(Q) \equiv \underset{Q}{Max}\ Q\left[1-Q\right] - \frac{Q^2}{2}$$

$$\underline{\text{CPO}}: \quad Q)\ 1-Q-Q-Q=0$$

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{1}{3}$$

Como as firmas são idênticas, temos que:

$$q_1^C = q_2^C = \frac{1}{6}$$

Esta é a quantidade produzida em um equilíbrio de cartel.

(b) Seja a demanda inversa nesse novo mercado dada por $P' = a - x_1$ e o novo custo de produção da firma 1 dado por $C(q_1, x_1) = (q_1 + x_1)^2/2$. Daí, o problema de maximização da firma 1 passa a ser dado por:

$$\underset{q_1, x_1}{Max}\ P.q_1 + P'.x_1 - C(q_1, x_1) \equiv \underset{q_1, x_1}{Max}\ q_1\left[1 - (q_1 + q_2)\right] + x_1\left[a - x_1\right] - \frac{(q_1 + x_1)^2}{2}$$

<u>CPO</u>: $q_1)\ 1 - (q_1 + q_2) - q_1 - (q_1 + x_1) = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1 - q_2 - x_1}{3}$

$$x_1)\ a - x_1 - x_1 - (q_1 + x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a - q_1}{3}$$

Juntando as duas equações, temos:

$$q_1 = \frac{1 - q_2 - \left(\frac{a - q_1}{3}\right)}{3}$$

$$q_1 = \frac{3 - 3q_2 - a}{8}$$

Do item anterior sabemos que $q_2 = (1 - q_1)/3$ (isso porque para a firma 2 não mudou nada; o seu problema de maximização continua o mesmo). Daí, substituindo isso na equação encontrada acima para q_1 temos:

$$q_1^* = \frac{3 - a - 3\left(\frac{1 - q_1^*}{3}\right)}{8}$$

$$q_1^* = \frac{2 - a}{7}$$

$$x_1^* = \frac{8a - 2}{21}$$

$$q_2^* = \frac{5 + a}{21}$$

Estas quantidades caracterizam um equilíbrio de Cournot-Nash.

7.

(a) Se $b = 0$, $C_1(q) = q$ e então custo marginal de 1 = 1 < 2 = custo marginal de 2. Dessa forma, acontece como na questão 5 (a): toda a demanda para a firma 1, com ela cobrando $P_1 = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$.

(b) Se $b > 0$, a firma 1 começa a ter um custo quase-fixo (i.e., é um custo fixo pago caso produza alguma quantidade positiva). Assim, se dados a e b existir um preço P' pertencente ao intervalo (1, 2) tal que a firma 1 tenha lucro positivo, então o equilíbrio de Bertrand será a firma 1 cobrar $P_1 = P'$ e a firma 2 cobrar $P_2 = 2$. Ou seja, a firma 1 fica com todo o mercado. Uma condição incial que devemos ter é $a > b$, senão nunca valerá à pena para a firma 1 produzir. Para que ela possa cobrar um preço $P' < 2$ (um $P' = 2 - \varepsilon$, com $\varepsilon \to 0$) e, conseqüentemente, ficar com todo o mercado e obter lucro não negativo, é preciso que (sem perda de generalidade, podemos fazer $P' = 2$):

$$\pi_1 = P'.q_1 - (q_1 + b) = q_1(P' - 1) - b = (a - P')(P' - 1) - b \geq 0$$

$$(a-2)(2-1) - b = a - 2 - b \geq 0$$

$$b \leq a - 2$$

Agora, se $b > a - 2$, então não haverá tal P'. Assim, ela cobrará um preço $P'' > 2$ e a firma 2 cobrará $P_2 = P'' - \varepsilon$ e ficará com todo o mercado. Neste caso, o equilíbrio de Bertrand será $P_1 = P''$ e $P_2 = P'' - \varepsilon$.