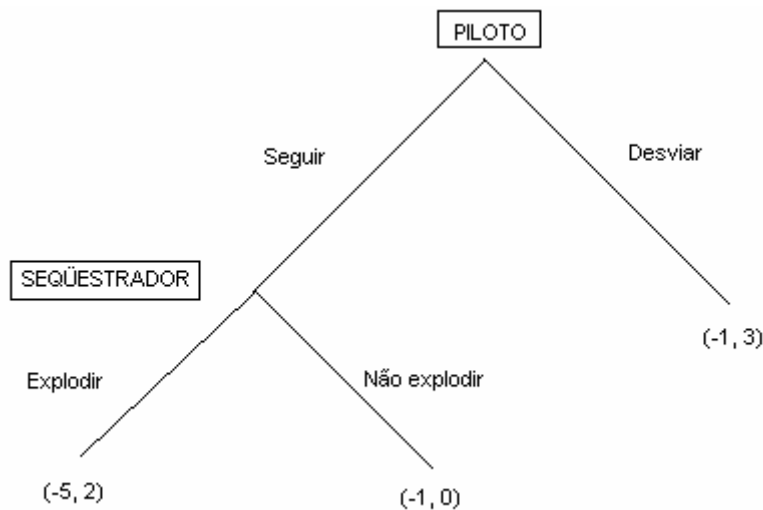


GABARITO LISTA 4

1. O piloto tem duas estratégias possíveis: “seguir viagem” ou “desviar para Cuba”. Já o seqüestrador tem outras duas possíveis estratégias se o piloto escolher “seguir viagem”: “explodir” ou “não explodir” o avião. Caso o piloto escolha “desviar para Cuba”, ele com certeza será detido (e o seqüestrador não explodirá o avião). Abaixo estão as representações do jogo na forma extensiva e na forma normal.



		SEQÜESTRADOR	
		Explodir	Não explodir
PILOTO	Seguir	-5, <u>2</u>	-1, 0
	Desviar	- <u>1</u> , <u>3</u>	- <u>1</u> , <u>3</u>

Pela representação do jogo na forma normal, vemos que há dois equilíbrios de Nash (em estratégias puras): (desviar, explodir) e (desviar, não explodir). Agora vejamos qual é o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS). Veja o nó de decisão do seqüestrador. Note que ele escolherá “explodir” por lhe gerar um payoff maior do que “não explodir” ($2 > 0$). Agora vejamos o nó de decisão do piloto. Antecipando a decisão a ser tomada

- (b) A representação do jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. A representação na forma normal é dada abaixo.

		2			
		CaCa	CaCo	CoCa	CoCo
1	CaCa	14/5, 4/5	12/5, 6/5	6/5, 0	4/5, 2/5
	CaCo	<u>3</u> , 4/5	<u>13/5</u> , <u>1</u>	7/5, 0	<u>1</u> , 1/5
	CoCa	2, 4/5	8/5, 6/5	2/5, 0	0, 2/5
	CoCo	11/5, 4/5	9/5, 1	3/5, 0	1/5, 1/5

Veja que a estratégia CaCo é estritamente dominante para a jogadora 1 (i.e., dizer a verdade é o melhor para ela). Dessa forma, a estratégia CaCo também se torna estritamente dominante para o jogador 2. Logo, o único equilíbrio de Nash desse jogo é (CaCo, CaCo).

- (c) A representação do jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Atribua payoff 3 se cada um for para um lado, 2 se ganhar no par ou ímpar e 1 se perder no par ou ímpar. A representação na forma normal é dada abaixo.

		MARIA	
		E	D
JOÃO	E	3/2, 3/2	<u>3</u> , <u>3</u>
	D	<u>3</u> , <u>3</u>	3/2, 3/2

- (d) A representação do jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Atribua payoff 3 se sentar à janela sem disputar, 2 se ganhar no par ou ímpar e 1 se perder no par ou ímpar ou não sair do lugar. A representação na forma normal é dada abaixo.

		BIANCA	
		C	NC
AMANDA	C	<u>3/2</u> , <u>3/2</u>	<u>3</u> , 1
	NC	1, <u>3</u>	3/2, 3/2

3.

- (i) Esta árvore não é válida. Como ela representa um jogo simultâneo, em cada nó de decisão do jogador 2 deve haver as mesmas estratégias possíveis. Isso porque ele faz a sua escolha sem saber em que nó ele está (não sabe o que o jogador 1 escolheu).

- (ii) Esta árvore é válida. Primeiro vejamos os conjuntos de estratégias de cada um dos jogadores. Repare que o jogador 1 é chamado a jogar em dois nós de decisão; sendo assim, cada estratégia sua deve definir uma ação para cada um desses nós. Já o jogador 2 somente é chamado a jogar uma vez. Os conjuntos de estratégias dos jogadores 1 e 2 são dados, respectivamente, por:

$$S_1 = \{AF, AG, BF, BG\}$$

$$S_2 = \{C, D, E\}$$

A representação na forma normal desse jogo é dada abaixo.

		2		
		C	D	E
1	AF	<u>6</u> , <u>0</u>	<u>6</u> , <u>0</u>	<u>6</u> , <u>0</u>
	AG	<u>6</u> , <u>0</u>	<u>6</u> , <u>0</u>	<u>6</u> , <u>0</u>
	BF	0, 1	5, 3	2, <u>4</u>
	BG	0, 1	0, <u>6</u>	2, 4

Acima vemos que este jogo tem seis equilíbrios de Nash em estratégias puras: (AF, C), (AF, D), (AF, E), (AG, C), (AG, D), (AG, E). Agora vejamos em estratégias mistas. Primeiramente, repare que as estratégias BF e BG são estritamente dominadas tanto por AF quanto por AG para o jogador 1. Dessa forma, podemos reescrever o jogo da seguinte forma:

		2		
		(q) C	(r) D	(1-q-r) E
1	(p) AF	6, 0	6, 0	6, 0
	(1-p) AG	6, 0	6, 0	6, 0

Como qualquer combinação de estratégias escolhidas pelos dois jogadores gera o mesmo payoff, temos que qualquer combinação de estratégias mistas escolhidas pelos jogadores caracteriza um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Isto é, $p, q \in [0, 1]$ caracteriza todos os equilíbrios de Nash em estratégias mistas desse jogo (há infinitos).

Agora queremos encontrar o ENPS. Para isso devemos olhar para a forma extensiva do jogo. Vejamos primeiro o nó final do jogador 1. Como $5 > 0$, vemos que ele escolherá F nesse nó. Sabendo disso, vemos que 2 escolherá D (pois $5 > 2 > 0$). Dessa forma, 1 escolherá A no nó inicial, pois $6 > 5$. Logo, o ENPS desse jogo é (AF, D).

4.

(a) A forma normal desse jogo está representada a seguir.

		M		
		(q)	(1-q)	
E	(p)	E	3, 3	-1, -1
	(1-p)	NE	0, 6	0, 6

Repare que há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo: (E, A) e (NE, G). Vejamos agora em estratégias mistas. A firma entrante escolherá E se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (E)} &\geq \text{payoff esperado (NE)} \\ q.(3) + (1-q).(-1) &\geq q.(0) + (1-q).(0) \\ 4q &\geq 1 \\ \boxed{q \geq 1/4} \end{aligned}$$

Analogamente, a entrante escolherá NE se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (NE)} &\geq \text{payoff esperado (E)} \\ q.(0) + (1-q).(0) &\geq q.(3) + (1-q).(-1) \\ 4q &\leq 1 \\ \boxed{q \leq 1/4} \end{aligned}$$

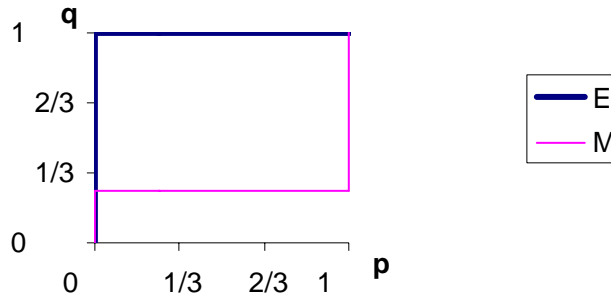
Para a firma monopolista vale o mesmo. Portanto, ele escolherá A se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (A)} &\geq \text{payoff esperado (G)} \\ p.(3) + (1-p).(6) &\geq p.(-1) + (1-p).(6) \\ 4p &\geq 0 \\ \boxed{p \geq 0} \end{aligned}$$

Analogamente, ela escolherá G se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (G)} &\geq \text{payoff esperado (A)} \\ p.(-1) + (1-p).(6) &\geq p.(3) + (1-p).(6) \\ 4p &\leq 0 \\ \boxed{p \leq 0} \end{aligned}$$

Dado isso, podemos desenhar as funções melhor resposta para cada jogador (mesmo raciocínio da lista 1). O encontro dessas duas funções define o(s) equilíbrio(s) de Nash em estratégias mistas.



Com isso, vemos que o encontro de melhores respostas dos dois jogadores se dá em $p = 0$ e $0 \leq q \leq 1/4$. Estes são os (infinitos) equilíbrios de Nash em estratégias mistas.

Agora voltemos para a árvore para encontrarmos o ENPS. Veja o último nó de decisão (o do monopolista). Vemos que ele escolherá A, pois $3 > -1$. Sabendo disso, a firma entrante escolherá E, pois $3 > 0$. Logo, o ENPS desse jogo é (E, A). A ameaça da firma monopolista de fazer uma guerra de preços caso a outra firma resolva de fato entrar na indústria não é crível, pois nesse caso a firma monopolista ficaria bem pior. Se ambas as firmas agirem racionalmente, portanto, chegaremos ao ENPS, (E, A).

- (b) A representação desse novo jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Agora os conjuntos de estratégias das duas firmas são dados por (o primeiro termo entre parênteses diz respeito à ação escolhida pelo jogador em seu primeiro nó de decisão e o segundo diz respeito à ação no segundo nó; estes dois termos em conjunto caracterizam uma estratégia para o jogador):

$$S_E = \{(E, E), (E, NE), (NE, E), (NE, NE)\}$$

$$S_M = \{(C, A), (C, G), (NC, A), (NC, G)\}$$

Vejamos o último nó de decisão da árvore, que é do monopolista. Ele vai escolher A, pois $3 > -1$. A firma entrante, caso a monopolista não assuma o compromisso, vai escolher E (pois $3 > 0$) e, caso o monopolista assuma o compromisso, vai escolher NE (pois $0 > -1$). Sendo assim, no nó inicial a firma monopolista escolherá assumir o compromisso, pois $6 > 3$. Logo, o ENPS desse jogo é ((NE,E), (C,A)).

- (c) A representação desse novo jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Denote por c o custo do investimento da firma monopolista. Agora os conjuntos de estratégias das duas firmas são dados por:

$$S_E = \{(E, E), (E, NE), (NE, E), (NE, NE)\}$$

$$S_M = \{(I, A, A), (I, A, G), (I, G, A), (I, G, G), (NI, A, A), (NI, A, G), (NI, G, A), (NI, G, G)\}$$

Do lado direito da árvore (caso em que o monopolista não investe), já sabemos qual será a solução por indução retroativa: a monopolista escolhe A e a entrante escolhe E, obtendo-se os payoffs (3, 3). Agora analisemos o lado esquerdo, em que o monopolista resolve investir. Vejamos o último nó de decisão, que é do monopolista. Ele vai escolher G, pois $4 > 3-c$, para qualquer $c > 0$. A firma entrante, nesse caso, vai escolher NE (pois $0 > -1$). Sendo assim, no nó inicial o monopolista escolherá realizar o investimento se $c < 3$ (pois teremos $6-c > 3$), escolherá não realizá-lo se $c > 3$ (pois $6-c < 3$) e ficará indiferente se $c = 3$ ($6-c = 3$). Logo, o ENPS desse jogo depende do valor de c . Se $c < 3$, o ENPS é ((NE,E), (I,G,A)); se $c > 3$, o ENPS é ((NE,E), (NI,G,A)); e se $c = 3$, ambos serão ENPS. Portanto, vemos que se $c < 3$, vale à pena para a firma monopolista realizar o investimento, pois ela obterá um lucro maior do que se não realizá-lo e deixar a outra firma entrar no mercado.

5.

(a) A seguir está a representação na forma normal desse jogo.

		BIANCA		
		(q)	(1-q)	
AMANDA	(p)	vai	<u>-10, 100</u>	<u>-10, 100</u>
	(1-p)	não vai	<u>-100, 0</u>	<u>100, 50</u>

Repare que há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo: (vai, queima) e (não vai, não queima). Vejamos agora em estratégias mistas. Amanda escolherá “vai” se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (vai)} &\geq \text{payoff esperado (não vai)} \\ q \cdot (-10) + (1-q) \cdot (-10) &\geq q \cdot (-100) + (1-q) \cdot (100) \\ 200q &\geq 110 \\ \boxed{q \geq 11/20} \end{aligned}$$

Analogamente, Amanda escolherá “não vai” se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (não vai)} &\geq \text{payoff esperado (vai)} \\ q \cdot (-100) + (1-q) \cdot (100) &\geq q \cdot (-10) + (1-q) \cdot (-10) \\ 200q &\leq 110 \\ \boxed{q \leq 11/20} \end{aligned}$$

Para Bianca vale o mesmo. Portanto, ela escolherá “queima” se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (queima)} &\geq \text{payoff esperado (não queima)} \\ p \cdot (100) + (1-p) \cdot (0) &\geq p \cdot (100) + (1-p) \cdot (50) \\ 50p &\geq 50 \\ \boxed{p \geq 1} \end{aligned}$$

Analogamente, ela escolherá “não queima” se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (não queima)} &\geq \text{payoff esperado (queima)} \\ p \cdot (100) + (1-p) \cdot (50) &\geq p \cdot (100) + (1-p) \cdot (0) \\ 50p &\leq 50 \\ \boxed{p \leq 1} \end{aligned}$$

Com isso, vemos que o encontro de melhores respostas dos dois jogadores se dá em $p = 1$ e $q = 11/20$. Este é o equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Agora voltemos para a árvore para encontrarmos o ENPS. Veja o último nó de decisão (o de Bianca). Vemos que ela escolherá “não queima”, pois $50 > 0$. Sabendo disso, Amanda escolherá “não vai”, pois $100 > -10$. Logo, o ENPS desse jogo é (não vai, não queima).

- (b) A ameaça de Bianca de queimar os ingressos caso Amanda resolva de fato não ir ao show com ela não é crível, pois nesse caso Bianca ficaria bem pior. Se ambas agirem racionalmente, portanto, chegaremos ao ENPS desse jogo, (não vai, não queima).
- (c) A representação desse novo jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Agora os conjuntos de estratégias das duas jogadoras são dados por:

$$\begin{aligned} S_A &= \{(V, V), (V, NV), (NV, V), (NV, NV)\} \\ S_B &= \{(C, Q), (C, NQ), (NC, Q), (NC, NQ)\} \end{aligned}$$

Do lado direito da árvore (caso em que Bianca não assume o compromisso), já sabemos qual será a solução por indução retroativa: Bianca escolhe NQ e Amanda escolhe NV, obtendo-se os payoffs (100, 50). Agora analisemos o lado esquerdo, em que Bianca assume o compromisso. Vejamos o último nó de decisão, que é da Amanda. Ela vai escolher V, pois $-10 > -100$. Sendo assim, no nó inicial Bianca escolherá C, pois $100 > 50$. Logo, o ENPS é ((V,NV), (C,NQ)).

6. Os conjuntos de estratégias do filho e do pai são dados, respectivamente, por:

$$S_F = \{(E, E), (E, NE), (NE, E), (NE, NE)\}$$

$$S_P = \{(C, C), (C, P), (P, C), (P, P)\}$$

A representação na forma normal desse jogo é dada abaixo.

		PAI			
		(C,C)	(C,P)	(P,C)	(P,P)
FILHO	(E,E)	<u>3</u> , <u>4</u>	<u>3</u> , <u>4</u>	3, <u>4</u>	3, <u>4</u>
	(E,NE)	<u>3</u> , <u>4</u>	<u>3</u> , <u>4</u>	3, <u>4</u>	3, <u>4</u>
	(NE,E)	2, <u>4</u>	2, <u>4</u>	<u>4</u> , 2	<u>4</u> , 2
	(NE,NE)	-2, 0	<u>3</u> , <u>2</u>	<u>4</u> , <u>2</u>	<u>4</u> , <u>2</u>

(a) Vemos acima que há sete equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo: ((E,E), (C,C)), ((E,E), (C,P)), ((E,NE), (C,C)), ((E,NE), (C,P)), ((NE,NE), (C,P)), ((NE,NE), (P,C)) e ((NE,NE), (P,P)).

(b) Para encontrar a solução por indução retroativa, devemos começar olhando para o último nó de decisão da árvore, que é do pai. Aí vemos que ele escolherá P, pois $2 > 0$. No nó anterior, ciente disso, o filho escolherá NE, pois $3 > 2$. Voltando mais um nó, vemos que o pai ficará indiferente entre P e C, pois ambas gerarão payoff 2. E, por fim, no nó inicial o filho escolherá NE, pois ele pode obter payoff 3 caso o pai escolha C ou payoff 4 caso o pai escolha P. Ou seja, ele fica pelo menos tão bem quanto se escolhesse E (no qual obtém payoff 3 com certeza). Logo, há duas soluções por indução retroativa para esse jogo: ((NE,NE), (C,P)) e ((NE,NE), (P,P)). Tais soluções podem ser encontradas nesse jogo, pois trata-se de um jogo de informação perfeita.

(c) Há dois ENPS nesse jogo: ((NE,NE), (C,P)) e ((NE,NE), (P,P)). Como se trata de um jogo de informação perfeita, eles coincidem com as soluções por indução retroativa.

7.

		COCA	
		(q)	(1-q)
PEPSI	(p)	NL	L
	(1-p)	NL	L

NL	1, 2	<u>0</u> , <u>6</u>
L	<u>4</u> , <u>0</u>	-2, -2

- (a) Vemos acima que há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo: (L, NL) e (NL, L). Vejamos agora em estratégias mistas. A Pepsi escolherá NL se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (NL)} &\geq \text{payoff esperado (L)} \\ q.(1) + (1-q).(0) &\geq q.(4) + (1-q).(-2) \\ 5q &\leq 2 \\ \boxed{q \leq 2/5} \end{aligned}$$

Analogamente, ela escolherá L se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (L)} &\geq \text{payoff esperado (NL)} \\ q.(4) + (1-q).(-2) &\geq q.(1) + (1-q).(0) \\ 5q &\geq 2 \\ \boxed{q \geq 2/5} \end{aligned}$$

Para a Coca vale o mesmo. Portanto, ela escolherá NL se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (NL)} &\geq \text{payoff esperado (L)} \\ p.(2) + (1-p).(0) &\geq p.(6) + (1-p).(-2) \\ 6p &\leq 2 \\ \boxed{p \leq 1/3} \end{aligned}$$

Analogamente, ela escolherá L se:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (L)} &\geq \text{payoff esperado (NL)} \\ p.(6) + (1-p).(-2) &\geq p.(2) + (1-p).(0) \\ 6p &\geq 2 \\ \boxed{p \geq 1/3} \end{aligned}$$

Com isso, vemos que o encontro de melhores respostas dos dois jogadores se dá em $p = 1/3$ e $q = 2/5$. Este é o equilíbrio de Nash em estratégias mistas desse jogo.

- (b) Nesse caso, a probabilidade de ocorrer o resultado (L, L) é $(1-p).(1-q) = 2/5$. Tal afirmação não é verdadeira, uma vez que cada uma das empresas joga L com probabilidade positiva.
- (c) A representação desse novo jogo na forma extensiva está no arquivo anexo. Analisando a árvore por indução retroativa, vemos que a Coca escolherá L se a Pepsi escolher NL e escolherá NL se a Pepsi escolher L. Sendo assim, no nó inicial a Pepsi escolherá L. Logo, o resultado do jogo é o ENPS é (L, NL).

8.

(A) A representação na forma extensiva dos contextos (a) e (b) está no arquivo anexo.

(B) O jogo (a) não pode ser resolvido por indução retroativa pois trata-se de um jogo de informação imperfeita (quando cada calouro faz a sua escolha não sabe o que o outro escolheu). Já o jogo (b) pode, pois é um jogo de informação perfeita. Nesse caso, comecemos olhando os dois últimos nós de decisão do veterano. Em ambos vemos que ele escolherá “pune”, pois $2 > 0$. Sendo assim, o calouro 2 escolherá “reage” se o calouro 1 escolher “reage” (pois $1 > -1$) e escolherá “não reage” se o calouro 1 também escolher “não reage” (pois $-1 > -2$). Indo para o nó de decisão do calouro 1, vemos que ele escolherá, portanto, “reage”, pois $1 > -1$. Chegando ao nó inicial vemos que o veterano escolherá fazer o trote, pois $-1 > -2$. Logo, a única solução por indução retroativa do jogo é (trote/pune, reage, reage/não reage).

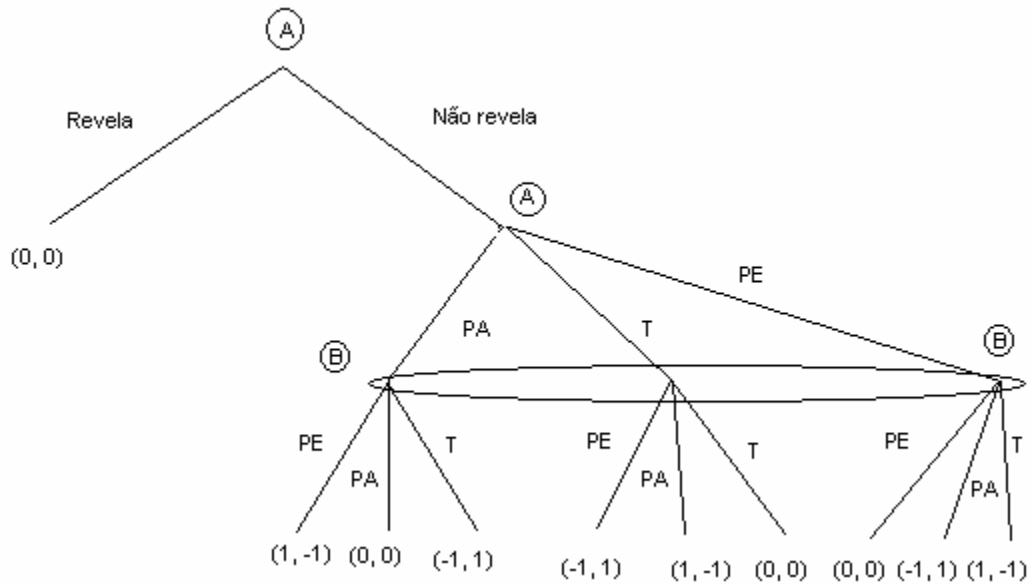
(C) O resultado esperado desses jogos é o ENPS. No caso (a) não podemos aplicar indução retroativa, mas devemos analisar a árvore de outra forma. Vejamos primeiro os últimos nós de decisão do veterano. Em ambos vemos que ele escolherá “pune”, pois $2 > 0$. Agora devemos analisar o subjogo em que os calouros 1 e 2 decidem simultaneamente se reagem ou não reagem. A representação desse subjogo na forma normal é dada a seguir.

		2	
		reage	não reage
1	reage	1, 1	-2, -1
	não reage	-1, -2	-1, -1

Veja que há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse subjogo: (reage, reage) e (não reage, não reage). Sendo assim, no nó inicial o veterano deve decidir entre não fazer o trote e obter payoff -2 ou fazer o trote e obter payoff -1 ou payoff 1, dependendo de qual equilíbrio de Nash for realizado. Dessa forma, vemos que ele escolherá fazer o trote. Sendo assim, os ENPS desse jogo são (trote/pune/pune, reage, reage) e (trote/pune/pune, não reage, não reage).

(D) Não, pois cada calouro não sabe o que os outros escolherão fazer, e dessa forma pode ter medo de reagir e ser punido e por isso preferir não reagir.

9. A representação desse jogo na forma extensiva é dada a seguir. Repare que o jogador A pode jogar pedra e revelá-lo (tal estratégia é representada por PE) ao jogador B ou pode jogar qualquer uma das três opções sem revelá-la a B.



O jogo segue da seguinte forma. Primeiro o jogador A decide se revela ou não a sua escolha. Se ele revelar, está implícito que escolherá pedra e, assim, B escolherá papel para ganhar. Agora, se A escolher não revelar, ele deverá escolher simultaneamente a B uma das três opções. Os conjuntos de estratégias dos dois jogadores são dados por:

$$S_A = \{(R, PE), (R, PA), (R, T), (NR, PE), (NR, PA), (NR, T)\}$$

$$S_B = \{PE, PA, T\}$$

A representação desse jogo na forma normal é dada abaixo.

		B		
		PE	PA	T
A	(R, PE)	0, 0	0, 0	0, 0
	(R, PA)	0, 0	0, 0	0, 0
	(R, T)	0, 0	0, 0	0, 0
	(NR, PE)	0, 0	-1, 1	1, -1
	(NR, PA)	1, -1	0, 0	-1, 1
	(NR, T)	-1, 1	1, -1	0, 0

- (a) Veja que não há equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo.

- (b) Para encontrar os ENPS desse jogo, devemos encontrar os equilíbrios de Nash de cada subjogo. Devemos começar pelo último subjogo, em que A e B fazem sua escolha simultaneamente. A representação desse subjogo na forma normal é dada por:

		B		
		(q)	(s)	(1-q-s)
A	(p)	PE	PA	T
	(l)	PE	PA	T
	(1-p-l)	PE	PA	T
		0, 0	-1, 1	1, -1
		1, -1	0, 0	-1, 1
		-1, 1	1, -1	0, 0

Veja que novamente não há equilíbrios de Nash em estratégias puras. Vejamos agora em estratégias mistas (repare que esse jogo é similar ao jogo de par ou ímpar, mas com três estratégias para cada um em vez de duas). O jogador A somente atribuirá probabilidade positiva de escolher PE, PA e T se:

$$\text{payoff esperado (PE)} = \text{payoff esperado (PA)} = \text{payoff esperado (T)}$$

Resolvendo a primeira parte da expressão acima nos dá:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (PE)} &= \text{payoff esperado (PA)} \\ q.(0) + s.(-1) + (1-q-s).(1) &= q.(1) + s.(0) + (1-q-s).(-1) \\ 3q &= 2 - 3s \\ \boxed{q} &= (2 - 3s)/3 \end{aligned}$$

Resolvendo a segunda parte:

$$\begin{aligned} \text{payoff esperado (PA)} &= \text{payoff esperado (T)} \\ q.(1) + s.(0) + (1-q-s).(-1) &= q.(-1) + s.(1) + (1-q-s).(0) \\ 3q &= 1 \\ \boxed{q} &= 1/3 \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão acima na anterior nos dá:

$$\begin{aligned} (2 - 3s)/3 &= 1/3 \\ \boxed{s} &= 1/3 \end{aligned}$$

Como o jogo é simétrico, o mesmo valerá para o jogador B. Logo, teremos $p = l = 1/3$. Com isso, vemos que o encontro de melhores respostas dos dois jogadores se dá em $p = l = q = s = 1/3$. Este é o equilíbrio de Nash em estratégias mistas desse jogo.

10. Primeiro a firma 1 escolhe a quantidade que produzirá e em seguida, dada essa escolha, a firma 2 escolhe a sua quantidade. Então, primeiramente vamos estabelecer a reação da firma 2 a cada escolha da firma 1. O problema de maximização de lucro da firma 2 é dado a seguir.

$$\underset{q_2}{Max} P.q_2 - C.q_2 \equiv \underset{q_2}{Max} q_2[A - (q_1 + q_2) - C]$$

$$\underline{\text{CPO:}} \quad q_2) \quad A - (q_1 + q_2) - C - q_2 = 0$$

$$q_2 = r_2(q_1) = \frac{A - C - q_1}{2}$$

A firma 1 antecipa essa reação da firma 2 e resolve o seu problema de maximização.

$$\underset{q_1}{Max} P.q_1 - C.q_1 \equiv \underset{q_1}{Max} q_1[A - (q_1 + r_2(q_1)) - C] \equiv \underset{q_1}{Max} q_1 \left[\frac{A - C - q_1}{2} \right]$$

$$\underline{\text{CPO:}} \quad q_1) \quad \frac{A - C}{2} - q_1 = 0$$

$$q_1^* = \frac{A - C}{2}$$

$$q_2^* = r_2(q_1^*) = \frac{A - C}{4}$$

Tais quantidades representam o ENPS desse jogo.

11. Primeiro a firma 1 escolhe a quantidade que produzirá e em seguida, dada essa escolha, as firmas 2 e 3 escolhem as suas quantidades. Então, como na questão anterior, primeiramente vamos estabelecer a reações das firmas 2 e 3 a cada escolha da firma 1. O problema de maximização de lucro da firma 2 é dado a seguir.

$$\underset{q_2}{Max} P.q_2 - C.q_2 \equiv \underset{q_2}{Max} q_2[A - (q_1 + q_2 + q_3) - C]$$

$$\underline{\text{CPO:}} \quad q_2) \quad A - (q_1 + q_2 + q_3) - C - q_2 = 0$$

$$q_2 = r_2(q_1) = \frac{A - C - q_1 - r_3(q_1)}{2}$$

A firma 3 resolve um problema semelhante e tem como CPO:

$$q_3 = r_3(q_1) = \frac{A - C - q_1 - r_2(q_1)}{2}$$

Como as duas firmas são idênticas (têm os mesmos custos), temos que, em equilíbrio, $r_2(q_1) = r_3(q_1)$. Daí:

$$r_2(q_1) = \frac{A - C - q_1 - r_2(q_1)}{2}$$

$$r_2(q_1) = r_3(q_1) = \frac{A - C - q_1}{3}$$

A firma 1 antecipa essas reações das firmas 2 e 3 e resolve o seu problema de maximização.

$$\text{Max}_{q_1} P \cdot q_1 - C \cdot q_1 \equiv \text{Max}_{q_1} q_1 [A - (q_1 + r_2(q_1) + r_3(q_1)) - C] \equiv \text{Max}_{q_1} q_1 \left[\frac{A - C - q_1}{3} \right]$$

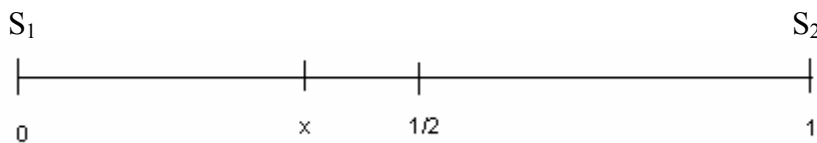
$$\text{CPO: } q_1) \frac{A - C - 2q_1}{3} = 0$$

$$q_1^* = \frac{A - C}{2}$$

$$q_2^* = q_3^* = \frac{A - C}{6}$$

Tais quantidades representam o ENPS desse jogo.

12. Sejam q_1 e q_2 as quantidades de sorvetes vendidas, respectivamente, pelos sorveteiros 1 e 2 e P_1 e P_2 os preços cobrados por cada um. A quantidade total demandada pelos banhistas é $Q = q_1 + q_2 = 1$. Abaixo segue uma representação dessa praia linear de cumprimento unitário. Se um banhista estiver em um ponto x da praia, ele estará a uma distância $d_1 = x$ de S_1 (o sorveteiro 1) e a uma distância $d_2 = 1 - x$ de S_2 (o sorveteiro 2).



Denote o custo do sorvete para o banhista por cs . Ele escolherá o sorveteiro que lhe oferecer o menor custo total. Sendo assim:

$$cs = \text{Min}\{P_1 + \tau.d_1, P_2 + \tau.d_2\}$$

O lucro de cada sorveteiro é dado por:

$$\pi_i = P_i \cdot q_i - c \cdot q_i$$

- (a) Se os dois sorveteiros escolhem simultaneamente seus preços trata-se de um duopólio de Bertrand. Eles devem maximizar seus lucros sujeito à distância que deverá ser percorrida (e seu custo) pelos banhistas. Denote por d o ponto na praia onde está o banhista que está indiferente entre comprar com o sorveteiro 1 ou com o sorveteiro 2 (no caso de os sorveteiros cobrarem o mesmo preço, $d = 1/2$). Para esse banhista, o custo de comprar com um é o mesmo que comprar com o outro. Assim, temos que:

$$P_1 + \tau.d = P_2 + \tau.(1-d)$$

$$d = \frac{1}{2} - \frac{P_1 - P_2}{2\tau}$$

Repare que todos os banhistas à esquerda do banhista em d comprarão com S_1 e todos à direita comprarão com S_2 . Dessa forma, $q_1 = d$ e $q_2 = 1 - d$. Assim, o problema de maximização da firma 1 é dado por:

$$\text{Max}_{P_1} P_1 \cdot q_1 - c \cdot q_1 \equiv \text{Max}_{P_1} d [P_1 - c] \equiv \text{Max}_{P_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{P_1 - P_2}{2\tau} \right) [P_1 - c]$$

$$\text{CPO: } P_1) \frac{1}{2} - \frac{P_1 - P_2}{2\tau} - P_1 \left(\frac{1}{2\tau} \right) = 0$$

$$P_1 = \frac{P_2 + \tau}{2}$$

E o problema de maximização da firma 2 é dado por:

$$\text{Max}_{P_2} P_2 \cdot q_2 - c \cdot q_2 \equiv \text{Max}_{P_2} (1-d) [P_2 - c] \equiv \text{Max}_{P_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2\tau} \right) [P_2 - c]$$

$$\text{CPO: } P_2) \frac{1}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2\tau} - P_2 \left(\frac{1}{2\tau} \right) = 0$$

$$P_2 = \frac{P_1 + \tau}{2}$$

Substituindo a expressão acima na anterior temos:

$$P_1 = \frac{P_1 + \tau}{2}$$

$$P_1 = P_2 = \tau$$

Esse é o equilíbrio de Nash em estratégias puras desse jogo.

- (b) Suponha que S_2 se comprometa a cobrar um preço \overline{P}_2 . Dessa forma, do problema de maximização S_1 , temos que:

$$P_1 = \frac{\overline{P}_2 + \tau}{2}$$

Sabendo disso, S_2 resolverá seu problema de maximização para escolher \overline{P}_2 .

$$\underset{\overline{P}_2}{Max} (1-d)[\overline{P}_2 - c] \equiv \underset{\overline{P}_2}{Max} \left(\frac{1}{2} + \frac{P_1 - \overline{P}_2}{2\tau} \right) [\overline{P}_2 - c] \equiv \underset{\overline{P}_2}{Max} \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau - \overline{P}_2}{4\tau} \right) [\overline{P}_2 - c]$$

$$\text{CPO: } \overline{P}_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau - \overline{P}_2}{4\tau} \right) - \overline{P}_2 \left(\frac{1}{4\tau} \right) = 0$$

$$\overline{P}_2 = \frac{3\tau}{2}$$

Substituindo a expressão acima na anterior temos:

$$P_1 = \frac{5\tau}{4}$$

Esses dois preços caracterizam o ENPS desse jogo.

13.

- (a) O jogo está representado na forma extensiva no arquivo anexo. A firma concorrente é chamada a jogar duas vezes e a estabelecida apenas uma. Sendo assim, os seus conjuntos de estratégias são dados por:

$$S_C = \{(E, D), (E, ND), (NE, D), (NE, ND)\}$$

$$S_E = \{D, ND\}$$

- (b) A representação na forma normal desse jogo é dada a seguir.

ESTABELECIDA

		D	ND
CONCORRENTE	(E,D)	-3, <u>-3</u>	1, -5
	(E,ND)	-5, 1	<u>5</u> , <u>5</u>
	(NE,D)	<u>0</u> , <u>10</u>	0, <u>10</u>
	(NE,ND)	<u>0</u> , <u>10</u>	0, <u>10</u>

Vemos acima que há três equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse jogo: ((E,ND), ND), ((NE,D), D) e ((NE,ND), D). Agora voltemos para a árvore para encontrarmos os ENPS desse jogo. Caso a firma concorrente decida entrar no mercado, então o jogo passa a ser de informação imperfeita (pois as duas firmas escolhem simultaneamente se oferecerão descontos ou não). Dessa forma, a indução retroativa não se aplica nesse caso. Devemos, portanto, inicialmente analisar o subjogo em que as firmas decidem simultaneamente oferecer ou não descontos e encontrar os equilíbrios de Nash desse subjogo.

		ESTABELECIDA	
		D	ND
CONCORRENTE	D	<u>-3</u> , <u>-3</u>	1, -5
	ND	-5, 1	<u>5</u> , <u>5</u>

Veja que há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras nesse subjogo: (D, D) e (ND, ND). Sendo assim, no nó inicial a firma concorrente deve decidir entre não entrar e obter payoff 0 ou entrar e obter payoff -3 ou payoff 5, dependendo de qual equilíbrio de Nash for realizado. Mas o melhor para ambos, caso a firma concorrente entre, é o equilíbrio (ND, ND). Sendo assim, dos equilíbrios de Nash em estratégias puras encontradas acima para o jogo todo apenas dois são ENPS: ((E,ND), ND) e ((NE,D), D).

14.

(a) O problema de maximização de lucro do pastor 1 é dado por:

$$\text{Max}_{n_1} P.n_1[A - B(n_1 + n_2)] - C.n_1 \equiv \text{Max}_{n_1} n_1[A - B(n_1 + n_2) - C]$$

$$\text{CPO: } n_1) A - B(n_1 + n_2) - C - B n_1 = 0$$

$$n_1 = \frac{A - C - B n_2}{2B}$$

O pastor 2 resolve um problema semelhante e tem como CPO:

$$n_2 = \frac{A - C - B n_1}{2B}$$

Como os dois pastores são idênticos (têm os mesmos custos), temos que em equilíbrio $n_1^* = n_2^*$. Daí:

$$n_1^* = \frac{A - C - B n_1^*}{2B}$$

$$n_1^* = n_2^* = \frac{A - C}{3B}$$

Tais quantidades são o equilíbrio de Nash desse jogo.

(b) Nesse caso, devemos primeiro resolver o problema do pastor 2.

$$\text{Max}_{n_2} n_2 [A - B(n_1 + n_2) - C]$$

$$\text{CPO: } n_2) A - B(n_1 + n_2) - C - B n_2 = 0$$

$$n_2 = r_2(n_1) = \frac{A - C - B n_1}{2B}$$

O pastor 1 antecipa essa reação do pastor 2 e resolve o seu problema de maximização.

$$\text{Max}_{n_1} n_1 [A - B(n_1 + r_2(n_1)) - C] \equiv \text{Max}_{n_1} n_1 \left[\frac{A - B n_1 - C}{2} \right]$$

$$\text{CPO: } n_1) \frac{A - B n_1 - C - B n_1}{2} = 0$$

$$n_1^* = \frac{A - C}{2B}$$

$$n_2^* = \frac{A - C}{4B}$$

Tais quantidades representam um equilíbrio de Nash desse jogo. O outro é o equilíbrio do item anterior.

(c) O ENPS do item (b) são as quantidades encontradas neste item.