Teoria da Escolha Envolvendo o Risco: Uma Abordagem Introdutória

Prof.: Paulo C. Coimbra-Lisboa*
EPGE/FGV†

June 16, 2005

1 O Paradoxo de Bernoulli

No século XVII Blaise Pascal e Pierre de Fermat assumiram que a atratividade de um jogo que oferece os payoffs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ com probabilidades $(p_1, p_2, ..., p_n)$ era dada pelo seu valor esperado $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Em 1738 Nicolas Bernoulli propôs um exemplo através do qual podia-se contestar a veracidade da hipótese de Pascal-Fermat de que os indivíduos consideram apenas o valor esperado de uma loteria.

O exemplo de Nicolas Bernoulli, conhecido como Paradoxo de São Petersburgo:

"Suponha que alguém lhe proponha a participar de um jogo na qual é lançada uma moeda repetidamente até que um cara apareça. Você não precisa pagar nada para ter o direito de participar deste jogo e irá receber 2 ducados se o primeiro cara ocorrer no 1^o lançamento, 4 ducados se for necessário dois lançamentos para ocorrer o primeiro cara, e assim por diante. Assim, vc receberá 2^n ducados se o primeiro cara ocorrer no n^o lançamento!"

A pergunta:

Quanto você estaria disposto a receber para ceder o direito de participar deste jogo?"

De acordo com a hipótese de Pascal-Fermat o valor esperado será:

$$E(w) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n}\right) 2^n = \left(\frac{1}{2}\right) 2 + \left(\frac{1}{2^2}\right) 2^2 + \cdots = \infty$$

Desse modo, participar desse jogoseria preferível à qualquer montante finito ao certo. Como explicar, então, que qualquer pessoa sensata escolhe qualquer montante finito ao certo para abdicar do direito de participar desse jogo? A solução desse paradoxo foi proposta independentemente por Gabriel Cramer e pelo sobrinho de Nícolas, Daniel Bernoulli.

Argumentando que o ganho de 200 ducados não necessariamente valia duas vezes mais que um ganho de 100 ducados (que passou a ser conhecido como o princípio da utilidade marginal decrescente), eles utilizaram a hipótese da utilidade esperada (baseada no que hoje é conhecida como função de utilidade von-Neumann –

*Professor de Microeconomia do programa de MBA em Finanças da FGV-Management; aluno do programa de doutoramento em Economia - EPGE/FGV. E-mail: pc.coimbra@gmail.com. URL: http://www2.fgv.br/aluno/coimbra/

†Escola de Pós Graduação em Economia da Fundação Getulio Vargas, Praia de Botafogo, n^{o}184 a192, 11^o andar. CEP: 22.250-900. Rio de Janeiro, Brasil.

Morgenstern) ao invés de usar o valor esperado para avaliar a participação no jogo. Assim, o jogo seria avaliado com base no que hoje conhecemos como a hipótese da utilidade esperada.

$$E(u(w)) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n}\right) u(2^n) = \left(\frac{1}{2}\right) u(2) + \left(\frac{1}{2^2}\right) u(2^2) + \cdots < \infty$$

que Bernoulli conjecturou ser finito por causa do princípio da utilidade marginal decrescente (Bernoulli originalmente utilizou uma função de utilidade logaritmica do tipo $u(x) = lnx$). Consequentemente as pessoas estariam apenas dispostas a pagarem um montante finito para participarem deste jogo ainda que o seu valor esperado seja infinito.

2 Escolha sob o Risco

Até aqui vimos que o consumidor escolhe uma cesta de mercadorias para consumir. Não havia qualquer incerteza sobre o resultado da escolha. Na teoria da escolha sob o risco os objetos de escolha não são perfeitamente conhecidos, mas são distribuições sobre os resultados possíveis.

Consideremos duas alternativas:

Alternativa A: Lança-se uma moeda. Se o resultado for cara então você ganha uma viagem à Fernando de Noronha. Se o resultado for coroa então você tem que resolver 10.000 exercícios de Microeconomia!;

Alternativa B: lança-se um dado. Se o resultado for 1 ou 2 você nem ganha nem perde nada. Se for 3 ou 4 você ganha uma passagem para Fernando de Noronha. Se for 5 ou 6 você tem que resolver 10.000 exercícios de Microeconomia!

De qual das duas alternativas você escolheria participar?

Em situações onde vários resultados distintos podem ocorrer embora não saibamos, de fato, qual ocorrerá, o conjunto de escolhas será constituído por distribuições de probabilidades sobre tais resultados. Isto é, as preferências dos agentes econômicos sobre alternativas arriscadas devem ser expressas em termos da utilidade que a pessoa associaria aos possíveis resultados e às probabilidades a eles associados.

Queremos ser capazes de exprimir a utilidade sobre estas duas alternativas em termos da utilidade que é associada a cada resultado possível e a probabilidade que ele ocorra.

No exemplo, seja u_L a utilidade de ganhar uma viagem à Fernando de Noronha, seja $u_\varnothing$ a utilidade de nem ganhar nem perder nada e seja u_M a utilidade (ou desutilidade!) de resolver 10.000 exercícios de Microeconomia! Note que é razoável que se tenha que: $u_L > u_\varnothing > u_M$. Desse modo, poderíamos exprimir a utilidade esperada associada à cada alternativa:

$$U(A) = \tfrac{1}{2} \times u_L + 0 \times u_\varnothing + \tfrac{1}{2} \times u_M$$
$$U(B) = \tfrac{1}{3} \times u_L + \tfrac{1}{3} \times u_\varnothing + \tfrac{1}{3} \times u_M$$

Assim se para um determinado indivíduo: $u_L = 100$; $u_\varnothing = 0$ e $u_M = -500$ então teremos que $U(B) > U(A)$, o que nos sugere que $B \succ A$.

3 Princípios Básicos da Teoria da Escolha

Que restrições adicionais devemos impor sobre as preferências para assegurar que elas podem vir a serem representadas através de uma função de utilidade esperada?

Consideremos um problema de decisão $(X, \succeq)$ que consiste em um conjunto finito de resultados $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e em uma relação de preferências $(\succeq)$ sobre estes possíveis resultados. A expressão $x \succeq y$ deveria ser interpretada como "x é pelo menos tão bom quanto y". Nós esperamos que a relação de preferências satisfaça dois axiomas simples:

Axioma 1 ***Preferências Completas***
$\forall\ x, y \in X,\ x \succeq y$ ou $y \succeq x$

Axioma 2 ***Preferências Transitivas***
Se, $\forall\ x, y, z \in X,\ x \succeq y$ e $y \succeq z$ então $x \succeq z$

Ambos os axiomas asseguram que todas as escolhas podem ser ordenadas por uma cadeia simples sem falhas (axioma 1) e consistente.(axioma 2).

Apesar da relação de preferências ser a primitiva básica de qualquer problema de decisão (e, geralmente, observável) é muito mais fácil trabalhar com uma função de utilidade consistente $u : X \to \Re$ porque nós apenas temos que nos lembrar de n números reais $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$[1].

Definição 1 *Uma função de utilidade $u : X \to \Re$ é consistente com a relação de preferências de um problema de decisão $(X, \succeq)$ se, $\forall\ x, y \in X$:*

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$$

O que nos remete ao:

Teorema 1 *Assuma que o conjunto de resultados é finito. Então existe uma função de utilidade u que é consistente*

Prova. Simplesmente colecione todos os resultados equivalentes em classes equivalentes. Existem finitas classes de equivalências dado que existem apenas finitos resultados. Então nós podemos ordenar essas classes de equivalências em uma cadeia estritamente crescente devido ao fato de que as preferências são completas e transitivas.

Note que a função de utilidade não é unica. De fato qualquer transformação monotônica crescente de uma função de utilidade consistente dá outra função de utilidade que também é consistente. ■

Nós podemos, agora, definir um tomador de decisões racional.

Definição 2 *Um tomador de decisões racional que está diante de um problema de decisão $(X, \succeq)$ escolhe um resultado $x^* \in X$ que maximiza a sua utilidade (ou, equivalentemente, para cada $x \in X$ nós temos que $x^* \succeq x$).*

[1] Quando existem infinitas escolhas então devemos assegurar que existe uma função de utilidade contínua, o que requer mais um axioma para que se possa assegurar que as preferências são contínuas.

4 Teoria da Escolha sob o Risco

Para entender como as pessoas tomam decisões em situações envolvendo o risco o ponto de partida é a compreensão de "loterias". Loterias são definidas sobre os resultados X (que assumiremos ser um conjunto finito, com o intuito de manter a simplicidade).

Definição 3 ***"loteria simples" (ou plano contingente)***

Uma loteria simples é definida como o conjunto $\{(x_1, \pi_1), (x_2, \pi_2), \cdots, (x_n, \pi_n)\}$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ *e* $0 \leq \pi_i \leq 1$.

Em uma loteria simples o resultado x_i *ocorre com uma probabilidade* π_i.

Exemplo 1 *Uma combinação de resultados que paga* $x_1 = 100$ *em caso de um "boom" e* $x_2 = 50$ *em caso de uma "recessão", junto com a distribuição de probabilidade* $\pi_1 = 0,5$*,* $\pi_2 = 0,5$ *define uma loteria.*

Em um mundo sem risco os agentes derivam utilidade por consumir bens. Em um mundo com risco, o que importa é seu plano de consumo contingente (consumo em cada possível estado da natureza e probabilidades associadas a estes estados).

John von Neumann e Oskar Morgenstern mostraram que sob algumas restrições adicionais sobre as preferências existe uma função de utilidade sobre os resultados tal que a utilidade esperada de uma loteria fornece um ordenamento consistente de loterias.

Definição 4 *Assuma que exista uma função de utilidade* u *sobre os resultados* X*. A utilidade esperada da loteria*

$$L = \{(x_1, \pi_1), (x_2, \pi_2), \cdots, (x_n, \pi_n)\}$$

é definida como:

$$u(L) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i u(x_i)$$

Chamaremos $u(L)$ a função de utilidade esperada de von-Neumann - Morgenstern. a utilidade derivada em cada estado da natureza (u) é chamada de função de utilidade de Bernoulli em homenagem àquele que primeiro a utilizou.

Antes de introduzir os axiomas adicionais nós iremos discutir a noção de loterias compostas (de dois estágios)

Definição 5 ***"Loteria Composta" (ou loteria de loterias)***

A loteria L' *expressa como:*

$$L' = \{(L_1, q_1), (L_2, (1 - q_1))\}$$

Com probabilidade q_1 *a loteria simples* L_1 *é escolhida e com probabilidade* $(1 - q_1)$ *a loteria simples* L_2 *é escolhida.*

Ou seja, a loteria composta é uma loteria cujos prêmios são outras loterias!

Por exemplo, suponha que você tenha que lançar uma moeda antes de participar de um jogo. Se o resultado for cara então você irá lançar um dado e o seu prêmio será igual ao resultado do dado. Se, por outro lado, o resultado for coroa, então você irá retirar uma bola de uma urna com 10 bolas enumeradas e o seu prêmio será igual ao número da bola.

Formalmente, teremos que o conjunto de resultados possíveis será:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Se ocorrer cara então as probabilidades associadas a estes resultados serão:

$$\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0, 0\right\}$$

Se ocorrer coroa então as probabilidades associadas a estes resultados serão:

$$\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$$

Como cada uma destas loterias possíveis (i.e., o lançamento de um dado ou a retirada de uma bola numerada contendo 10 bolas) ocorre com igual probabilidade (lançamento da moeda) então segue-se que podemos reduzir a uma loteria simples:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0, 0, 0\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\} \\ &= \left\{\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right\} \end{aligned}$$

que associa a probabilidade associada a cada resultado antes do lançamento da moeda.

O primeiro axioma assume que apenas o resultado importa - o processo que gera os resultados é irrelevante.

Axioma 3 *Cada loteria composta é equivalente à uma loteria simples com a mesma distribuição sobre os resultados finais.*

Em alguns livros a equivalência de loterias simples e loterias compostas é assumida na definição de uma loteria. Éntretanto, é útil manter tais tipos de loterias separadas porque nós sabemos que o "framing" de um problema de decisão influencia como as pessoas fazem escolhas (i.e., tanto o processo como a distribuição final dos resultados importam).

Os dois axiomas a seguir não são controversos.

Axioma 4 ***Monotonicidade***
Assuma que a loteria L_1 é preferida a loteria L_2. Então a loteria composta $\{(L_1, \alpha), (L_2, (1-\alpha))\}$ é preferida à $\{(L_1, \beta), (L_2, (1-\beta))\}$ se $\alpha \succ \beta$

Axioma 5 ***Arquimediano***
Para quaisquer resultados $x, y, z \in X$ $x < y < z$ existe alguma loteria

$$L = \{(x, \alpha), (z, (1-\alpha))\}$$

tal que o agente é indiferente entre a loteria L e o resultado y

O axioma da substituição (também conhecido como independência de alternativas irrelevantes) é o axioma mais criticado.

Axioma 6 ***Independência das Alternativas Irrelevantes***

Se a loteria L_1 é preferida à loteria L_2 então qualquer combinação destas loterias com qualquer outra loteria L_3 irá preservar este ordenamento, i.e.:

$$\{(L_1, \alpha), (L_3, (1-\alpha))\} \succeq \{(L_2, \alpha), (L_3, (1-\alpha))\}$$

Sob estes axiomas nós obtemos o cérebre resultado devido à John von Neumann e Oskar Morgenstern:

Teorema 2 ***Função de Utilidade Esperada***

Sob os axiomas acima uma função de utilidade esperada existe.

Prova. Antes de mais nada nós encontramos o melhor e o pior resultado b e w (possível pois existe apenas finitamente muitos resultados) e então normalizemos a utilidade tal que $u(b) = 1$ e $u(w) = 0$.

Por causa do axioma arquimediano nós podemos encontrar um número α_x para cada resultado x tal que:

$$L = \{(b, \alpha_x), (w, (1-\alpha_x))\}$$

Nós podemos definir uma função de utilidade sobre cada resultado x tal que $u(x) = \alpha_x$.

Usando o axioma da monotonicidade pode ser mostrado que este número é único. Para cada loteria nós podemos agora calcular sua utilidade esperada. resta mostrar que esta função de utilidade esperada é consistente com as preferências originais.

Assim, tome duas loterias L_1 e L_2 tais que $L_1 \succeq L_2$.

Nós podemos escrever:

$$L_1 = \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \cdots, (x_n, p_n)\}$$

e

$$L_2 = \{(x_1, q_1), (x_2, q_2), \cdots, (x_n, q_n)\}$$

Agora, substitua cada resultado x_i pela loteria acima.

A loteria composta pode ser reescrita como:

$$L_1 = \{(b, \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i)), (w, \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i))\}$$

Similarmente ,nós teremos:

$$L_2 = \{(b, \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)), (w, \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i))\}$$

Pelo axioma da monotonicidade nós podemos deduzir que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$$

i.e.:

$$u(L_1) \geq u(L_2)$$

■

5 Paradoxo de Allais

A teoria da utilidade esperada forma a base da microeconomia moderna. A despeito de seu sucesso existem importantes inconsistências comportamentais relacionadas a ela. Algumas das quais nós iremos discutir brevemente antes de seguir o estudo.

Em 1953, Maurice Allais publica, em um texto célebre , resultados experimentais ilustrando violações ao axioma da independência das alternativas irrelevantes, conhecidos como "paradoxo de Allais". Consideremos a versão do experimento de Allais, conduzido por Kahneman e Tversky.

Suponha um conjunto de indivíduos, confrontados com dois problemas de decisão envolvendo prêmios monetários.

Problema 1: os indivíduos têm que escolher entre as seguintes duas alternativas:

Alternativa A: Receber \$2.500, com probabilidade $0,33$; receber \$2.400, com probabilidade $0,66$; receber \$0, com probabilidade $0,01$.

Alternativa B: Receber \$2.400, com certeza, i.e., probabilidade 1.

Problema 2: os indivíduos têm que escolher entre as seguintes duas alternativas:

Alternativa C: Receber \$2.500, com probabilidade $0,33$; receber \$0, com probabilidade $0,66$.

Alternativa D: Receber \$2.400, com probabilidade $0,34$; receber \$0, com probabilidade $0,66$.

No problema 1, constatou-se que uma parte significativa dos indivíduos prefere a alternativa B à alternativa A; no problema 2, observou-se uma preferência massiva pela alternativa C em detrimento da alternativa D. O ponto é que este padrão de preferências é obviamente incompatível com a regra da utilidade esperada.

Efetivamente, fazendo $u(\$0) = 0$, o perfil de preferências exibido no problema 1 implica que:

$$u(\$2.400) > 0,33u(\$2.500) + 0,66u(\$2.400) + 0,01u(\$0)$$

ou, equivalentemente, que

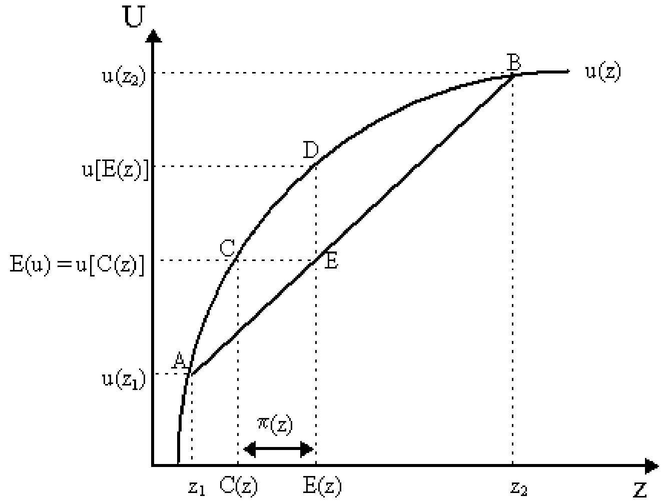
$$0,34u(\$2.400) > 0,33u(\$2.500)$$

Por outro lado, o perfil exibido no problema 2 implica a exata reversão desta inequação.

Kahneman e Tversky explicam este padrão de preferências como uma manifestação de algo mais geral, por eles denominado "efeito certeza" (certainty effect): muitos indivíduos (nos experimentos, mais que a maioria), ao compararem eventos certos com eventos relativamente parecidos mas incertos, tendem a atribuir maior peso aos eventos do primeiro tipo.

6 Aversão ao Risco

O conceito de aversão ao risco, intuitivamente, implica que ao enfrentar escolhas com retornos comparáveis, os agentes tendem escolheram a alternativa menos arriscadas, uma construção que nós devemos pela maior parte ao trabalho de Milton Friedman e a Leonard J. Savage (1948). Nós podemos visualizar o problema através da figura 1 a abaixo.



$Figura 1$

Deixe z ser uma variável aleatória que pode assumir dois valores, $\{z_1, z_2\}$, e deixe p ser a probabilidade da ocorrência de z_1 e $(1-p)$ a probabilidade da ocorrência de z_2. Conseqüentemente, o resultado esperado, ou $E(z) = pz_1 + (1-p)z_2$ que é mostrado na figura 1 na linha horizontal como a combinação convexa de z_1 e de z_2. Deixe $u : R \to R$ ser uma função de utilidade elementar (também conhecida como função de Bernoulli) côncava. Assim, a utilidade esperada associada será: $E(u) = pu(z_1) + (1-p)u(z_2)$, como mostrado na figura 1 pelo ponto E na secante que conecta os pontos $A = \{z_1, u(z_1)\}$ e $B = \{z_2, u(z_2)\}$. Note que a posição de E na secante depende, naturalmente, das probabilidades p, $(1-p)$.

Observe que da comparação dos pontos D e E na figura 1 que a concavidade da função de utilidade de elementar implica que a utilidade da renda associada ao valor esperado, $u[E(z)]$ é maior do que a utilidade esperada, $E(u)$, isto é $u[pz_1 + (1-p)z_2] > pu(z_1) + (1-p)u(z_2)$. Para entender melhor este problema, nós podemos pensar do seguinte modo. Suponha que há duas loterias, uma que paga $E(z)$ com certeza e outra que paga $z1$ ou $z2$ com probabilidades $(p, 1-p)$ respectivamente. No contexto de nossa notação da utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern, a utilidade da primeira loteria é $U(E(z)) = u(E(z))$ porque $E(z)$ é recebido com certeza; a utilidade do segunda loteria é $U(z_1, z_2; p, 1-p) = pu(z_1) + (1-p)u(z_2)$. Note que a renda esperada em ambas as loterias é a mesma, contudo é óbvio que se um agente for avesso ao risco então ele irá preferir $E(z)$ com certeza do que $E(z)$ com risco, isto é escolheria a primeiro loteria à segunda. Este é o que é capturado em figura 1 como o $u[E(z)] > E(u)$. Uma outra maneira de perceber este efeito é encontrando um "**equivalente certeza**" da loteria arriscada. Ou seja, considere uma terceira loteria em que pague a renda $C(z)$ com certeza. Como é óbvio de figura 1, a utilidade desta nova loteria é igual à utilidade esperada da loteria que está associada a resultados aleatórios, isto é $u(C(z)) = E(u)$. Assim, a loteria $C(z)$ com certeza é conhecida como equivalente certeza da loteria arriscada, isto é , é a loteria que dá a renda ao certo rende a mesma utilidade que a loteria arriscada. Entretanto, observe que a renda $C(z)$ é menor do que a renda esperada, o $C(z) < E(z)$. Contudo nós sabemos que um agente seria indiferente entre a recepção de $C(z)$ com certeza e de $E(z)$ com risco. Esta diferença, que nós denotamos $\pi(z) = E(z) - C(z)$ é conhecida como **prêmio de risco**, que é a quantidade máxima da renda que um agente está disposto renunciar a fim obter uma loteria sem risco (Pratt, 1964).

Desse modo, diremos que um agente é **avesso ao risco** se $C(z) \leq E(z)$ ou se $\pi(z) \geq 0$.

De maneira análoga podemos definir quando um agente é neutro ao risco e quando ele é propenso ao risco:

Um agente é **neutro ao risco** se $C(z) \leq E(z)$ ou se $\pi(z) \geq 0$.

Um agente é **propenso ao risco** se $C(z) \geq E(z)$ ou se $\pi(z) \leq 0$.

Agora, nós passaremos às idéias de funções de utilidade elementares côncavas, lineares e convexas para mostrar que elas representam o as atitudes de um agente avesso ao risco, neutro ao risco e propenso ao risco, através do seguinte teorema:

Teorema: Deixe $u : R \to R$ ser uma função de utilidade elementar que representa as preferências sobre a rendaque está aumentando monotonicamente. Então:
(i) u é côncava se e somente se as preferências forem de um agente avesso ao risco;
(ii) u é linear se e somente se as preferências forem de um agente neutro ao risco;
(iii) u é convexa se e somente se as preferências forem de um agente propenso ao risco.

Prova: Omitida.

7 Aplicação 1: Seguros

Considere um indivíduo avesso ao risco que possui uma riqueza inicial igual a W e que com probabilidade π ele irá sofrer uma perda igual a D. Note que se não se assegurar então a riqueza deste indivíduo será igual a $W - D$ com probabilidade π e W com probabilidade $(1 - \pi)$.

Considere, agora, um seguro que custe $\$q$ e que paga $\$1$ para cada unidade adquirida. Seja α o número de unidades que o consumidor irá comprar. Neste caso, a riqueza deste indivíduo será igual a $W - D + \alpha - q\alpha$ com probablilidade π e $W - q\alpha$ com probabilidade $(1 - \pi)$.

O problema de maximização de utilidade do consumidor será:

$$\max_{\alpha} \ \pi u(W - D + (1-q)\alpha) + (1-\pi)u(W - \alpha q)$$

As condições de primeira ordem serão dadas por:

$$\pi(1-q)u'(W - D + (1-q)\alpha)) - (1-\pi)qu'(W - \alpha q) = 0$$

Reescrevendo, teremos:

$$\frac{\pi}{1-\pi}\frac{u'(W - D + (1-q)\alpha)}{u'(W - \alpha q)} = \frac{q}{1-q}$$

Se as companhias seguradoras forem atuarialmente "justas" então o custo para o consumidor de $1 do seguro é apenas o custo esperado de fornecer aquela cobertura, i.e., $\pi = q$. Note que isto ocorre porque o segurador deverá pagar $1 com probabilidade π , logo o preço "justo" do seguro, q, deverá ser $\pi \cdot \$1 + (1-\pi) \cdot \$0 = \pi$.

Neste caso, teremos que $D = \alpha$, isto é, o indivíduo irá se assegurar plenamente em relação à possibilidade de perdas.

8 Aplicação 2: A Escolha da Carteira Ótima

Considere um indivíduo avesso ao risco que possui uma riqueza inicial igual a W e que deve decidir o quanto desta riqueza deverá ser investido em um ativo livre de risco (por simplicidade pense em moeda, que vale \$1 por cada unidade) e quanto deverá ser investido em um ativo arriscado (que paga \$0 com probabilidade π e paga $\$r$ com probabilidade $(1-\pi)$). Deixe x ser o montante da riqueza investido no ativo arriscado. Então o problema do indivíduo será:

$$\max_x \ \pi u(W-x) + (1-\pi)u(W+(r-1)x)$$

As condições de primeira ordem serão dadas por:

$$-\pi u'(W-x) + (1-\pi)(r-1)u'(W+(r-1)x) = \begin{cases} \leq 0, \text{ se } x^* = 0 \\ = 0, \text{ se } x^* \in (0, W) \\ \geq 0, \text{ se } x^* = W \end{cases}$$

Então, quando será que o consumidor não irá investir no ativo arriscado? I.e, quando $x^* = 0$?

Sabemos, das condições de primeira ordem, que $x^* = 0$ se

$$-\pi u'(W-x) + (1-\pi)(r-1)u'(W+(r-1)x) \leq 0$$

Como $u'(W) > 0$ segue-se que:

$$(1-\pi)r \leq 1$$

Note que $(1-\pi)r$ é p retorno esperado do ativo arriscado e 1 é o retorno do ativo sem risco. Portanto, apenas quando o retorno do ativo esperado for menor do que o retorno do ativo livre de risco é que o investidor irá escolher não investir nada no ativo arriscado. De outro modo, sempre que o retorno esperado do ativo arriscado for superior ao retorno do ativo livre de risco então o indivíduo irá escolher investir alguma parcela da riqueza no ativo arriscado, i.e.: se $x^* > 0$ então $(1-\pi)r > 1$.